目录

高等数学考点汇编

第一章 极限和连续

【考点 1】极限的三大性质

1.唯一性

2.局部保号性

3.局部有界性

【考点 2】极限的四大运算法则

若$\lim f\left(x\right)=A,\lim g\left(x\right)=B$，那么

1.$\lim\left[f\left(x\right)\pm g\left(x\right)\right]=\lim f\left(x\right)\pm\lim g\left(x\right)=A\pm B$

2.$\lim\left[f\left(x\right)\cdot g\left(x\right)\right]=\lim f\left(x\right)\cdot\lim g\left(x\right)=A\cdot B$

3.$\lim\dfrac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}=\dfrac{\lim f\left(x\right)}{\lim g\left(x\right)}=\dfrac{A}{B}\left(B\neq 0\right)$

4.$\lim f\left(x\right)^{g\left(x\right)}=\lim f\left(x\right)^{\lim g\left(x\right)}=A^{B}\left(A>0\right)$

【考点 3】夹逼准则

若数列$\left\{x_n\right\},\left\{y_n\right\},\left\{z_n\right\}$满足$y_n\leq x_n\leq z_n$，且$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$，则数列 的极限存在，且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$

若函数$f\left(x\right),g\left(x\right),h\left(x\right)$满足$g\left(x\right)\leq f\left(x\right)\leq h\left(x\right)$，且$\lim g\left(x\right)=\lim h\left(x\right)=A$，则$\lim f\left(x\right)$存在，且$\lim f\left(x\right)=A$

【考点 4】无穷小量与无穷大量的比阶

是在同一自变量变化过程中的无穷小，且$\alpha\neq 0$

若$\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=0$，则$\beta$是$\alpha$的高阶无穷小，记为$\beta=o\left(\alpha\right)$；

若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$，则 β 是 α 的低阶无穷小；

若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = c \neq 0$，则 β 是 α 的同阶无穷小；

若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$，则 β 是 α 的等价无穷小，记为 $\beta \sim \alpha$；

若 $\lim \frac{\beta}{\alpha^k} = c \neq 0 \left(k > 0\right)$，则 β 是 α 的 k 阶无穷小。

【考点 5】无穷小量的性质

无穷小乘有界函数仍为无穷小；

有限个无穷小的和仍为无穷小；

有限个无穷小的乘积仍为无穷小。

【考点 6】两个重要极限

1. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

2. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

【考点 7】连续与间断

连续：$\begin{cases} \lim\limits_{x \to x_0} f\left(x\right) = f\left(x_0\right) \\ \lim\limits_{x \to x_0^+} f\left(x\right) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f\left(x\right) = f\left(x_0\right) \end{cases}$

若 $f\left(x_0 + 0\right), f\left(x_0 - 0\right)$ 均存在，则 x_0 是第一类间断点

$f\left(x_0 + 0\right) = f\left(x_0 - 0\right) \neq f\left(x_0\right)$ 时，x_0 为可去间断点

$f\left(x_0 + 0\right) \neq f\left(x_0 - 0\right)$ 时，x_0 为跳跃间断点

若 $f\left(x_0 + 0\right), f\left(x_0 - 0\right)$ 至少有一个不存在，则 x_0 是第二类间断点

极限不存在且为无穷大时，x_0 为无穷间断点

极限不存在且为振荡时，x_0 为振荡间断点

第二章 一元函数微分学

【考点 1】导数的概念与几何意义

增量式：$f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$, $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$（证明用）

差值式： $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ （计算用）

切线方程： $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$

法线方程： $y-f(x_0)=-\dfrac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)\left(f'(x_0)\neq 0\right)$

【考点 2】导数的计算

$C'=0$　　$(x^a)'=ax^{a-1}$　　$(\sin x)'=\cos x$

$(\cos x)'=-\sin x$　　$(\tan x)'=\sec^2 x$　　$(\cot x)'=-\csc^2 x$

$(\sec x)'=\sec x\tan x$　　$(\csc x)'=-\csc x\cot x$　　$(a^x)'=a^x\ln a$

$(e^x)'=e^x$　　$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$　　$(\ln|x|)'=\dfrac{1}{x}$

$(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$　　$(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$　　$(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$

$(\operatorname{arccot} x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$　　$\left(\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right)'=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$　　$\left(\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\right)'=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$(u\pm v)'=u'\pm v'$　　$(Cu)'=Cu'$　　$(uv)'=u'v+uv'$　　$\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}(v\neq 0)$

1.复合函数求导

2.反函数求导

3.隐函数求导

4.幂指函数求导

5.参数方程求导

6.分段函数求导

7.高阶导数

【考点 3】微分中值定理

1.罗尔定理：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 内连续，(a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)$，则 $\exists\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=0.$

2.拉格朗日中值定理：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 内连续，(a,b) 内可导，则 $\exists\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}.$

【考点 4】洛必达法则

若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0(\infty/?),\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0(\infty)$，$f(x),g(x)$ 在点 x_0 的某去心邻域内可导，且 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在或为无穷大，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

【考点 5】单调性与极值

1.单调性

设函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导

如果在 (a,b) 内 $f'(x)\geq 0$，且等号仅在有限个点成立，则 $y=f(x)$ 在上单调递增；

如果在 (a,b) 内 $f'(x)\leq 0$，且等号仅在有限个点成立，则 $y=f(x)$ 在上单调递减；

2.极值

$f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续，且在 x_0 的某去心邻域内可导

若 $x\in(x_0-\delta,x_0)$ 时，$f'(x)<0$，$x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时，$f'(x)>0$，则 x_0 为极小值点

若 $x\in(x_0-\delta,x_0)$ 时，$f'(x)>0$，$x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时，$f'(x)<0$，则 x_0 为极大值点

【考点 6】凹凸性与拐点

1.凹凸性

设 $y=f\left(x\right)$ 在 $\left[a,b\right]$ 上连续，在 $\left(a,b\right)$ 内二阶可导

若 $f''\left(x\right)>0$，则称 $y=f\left(x\right)$ 为凹函数；若 $f''\left(x\right)<0$，则称 $y=f\left(x\right)$ 为凸函数

2.拐点

若 $f\left(x\right)$ 在 x_0 处连续，在 x_0 的某去心邻域二阶可导， $f''\left(x\right)$ 在点 $\left(x_0,f\left(x_0\right)\right)$ 两侧变号（$f'\left(x\right)$ 单调性相反），则点 $\left(x_0,f\left(x_0\right)\right)$ 为 $y=f\left(x\right)$ 的拐点

【考点7】曲线的渐近线

1.铅直渐近线：若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ \left(x\to x_0^+\right) \\ \left(x\to x_0^-\right)}} f\left(x\right)=\infty$，则 $x=x_0$ 为一条铅直渐近线

2.水平渐近线：若 $\lim\limits_{x\to\infty} f\left(x\right)=b$，则 $y=b$ 为一条水平渐近线

第三章 一元函数积分学

【考点 1】原函数与不定积分的概念

1.原函数的定义：如果$F(x)$在区间I上可导，而且对$\forall x\in I$，都有$F'(x)=f(x)$或$dF(x)=f(x)dx$，则称函数$F(x)$为$f(x)$在区间I上的一个原函数

2.原函数存在定理

① 连续函数必有原函数

② 含有跳跃、可去、无穷间断点的函数一定没有原函数

③ 含有震荡间断点的函数可能有也可能没有原函数

3.原函数之间的关系：如果$F(x)$是$f(x)$的一个原函数，则$F(x)+C$也是$f(x)$的原函数，其中C为任意常数，这说明，原函数若存在，不唯一。

4.不定积分的概念：在区间I上，函数$f(x)$的全体原函数称为$f(x)$的不定积分，记作$\int f(x)dx$，即

$$\int f(x)dx=F(x)+C$$

其中$F(x)$是$f(x)$在区间I上的一个原函数；$\int$ 称为积分号；$f(x)$称为被积函数，$f(x)dx$称为被积表达式；x称为积分变量

【考点 2】不定积分的性质

① 数乘：$\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$（$k$为常数）

② 分项：$\int[f(x)\pm g(x)]dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$

③ 线性运算：$\int[kf(x)\pm lg(x)]dx=k\int f(x)dx\pm l\int g(x)dx$（$k,l$为常数）

④ 先积后导：$\left[\int f(x)dx\right]'=f(x),d\int f(x)dx=f(x)dx$

⑤ 先导后积：$\int F'(x)dx=F(x)+C,\int dF(x)=F(x)+C$

【考点 3】不定积分基本公式

$\int kdx = kx + C$ $\int x^k dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} + C\left(k \neq -1\right)$ $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$

$\int \sin xdx = -\cos x + C$ $\int \cos xdx = \sin x + C$ $\int \tan xdx = -\ln|\cos x| + C$

$\int \cot xdx = \ln|\sin x| + C$ $\int \sec xdx = \ln|\sec x + \tan x| + C$ $\int \csc xdx = \ln|\csc x - \cot x| + C$

$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ $\int e^x dx = e^x + C$ $\int \sec^2 xdx = \tan x + C$

$\int \csc^2 xdx = -\cot x + C$ $\int \sec x \tan xdx = \sec x + C$ $\int \csc x \cot xdx = -\csc x + C$

$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C$ $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} dx = \ln\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right) + C$

$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + C$ $\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$

$\int \frac{1}{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$ $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + C$

【考点 4】换元积分法

1.第一类换元积分法（凑微分法/假的换元）

$$\int f\left[\varphi(x)\right]\varphi'(x)dx = \int f\left[\varphi(x)\right]d\left[\varphi(x)\right] \xrightarrow{\varphi(x)=t} \int f(t)dt = F(t) + C = F\left[\varphi(x)\right] + C$$

2.第二类换元积分法（真正的换元）

$$\int f(x)dx \xrightarrow{x=\varphi(t)} \int f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)dt\Big|_{t=\varphi^{-1}(x)}$$

① 三角代换：当被积函数中含有根号下平方和差时，使用三角代换

$\sqrt{a^2 - x^2} \Rightarrow x = a\sin t\left(-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}\right)$； $\sqrt{a^2 + x^2} \Rightarrow x = a\tan t\left(-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}\right)$；

$\sqrt{x^2 - a^2} \Rightarrow x = a\sec t\left(0 < t < \pi\right)$

② 复杂部分代换：当被积函数出现比较复杂的根式、指数、对数、反三角函数可直接把复杂部分整体换元

③ 倒代换：当被积函数分子次数明显低于分母次数时使用倒代换，令 $x = \frac{1}{t}$

【考点 5】分部积分法

设函数$u(x),v(x)$具有连续的导函数,则由乘积的导数公式有$(uv)'=u'v+uv'$,移项得$uv'=(uv)'-u'v$，两边积分得

$$ss\int uv'dx=\int(uv)'dx-\int u'vdx\Rightarrow\int udv=uv-\int vdu$$

当被积函数出现以下六种情况，均可使用分部积分

① 幂 x 指，指数函数当成v；② 幂 x 对，幂函数当成v；

③ 幂 x 三角,三角函数当成v；④ 幂 x 反三角,幂函数当成v；

⑤ 指 x 三角，两次分部积分构成一个循环，指数函数与三角函数均可当成v，但应注意第一次分部积分的v和第二次分部积分的v应该是同一个v；

⑥ $\sec^{2k+1}x/\csc^{2k+1}x$，将$\sec^2 x/\csc^2 x$放到后面，把$\tan x/\cot x$当成$v$

【考点 6】有理函数积分法

有理函数（有理分式）是指由两个多项式的商所表示的函数，形如：

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{a_0+a_1x+a_1x^2\cdots+a_nx^n}{b_0+b_1x+b_2x^2\cdots+b_mx^m}$$

若有理函数为假分式，对分子提取分母降幂变成真分式；

若有理函数为真分式，分母为 0 无解时，先消x在配方；分母为 0 有解时，部分分式展开（求参数的方法一般有待定系数法、取特殊值、留数法）

【考点 7】定积分的定义与几何意义

1.定积分的几何意义

$\int_a^b f(x)dx$表示曲边梯形面积的代数和，它仅仅表示一个数

2.定积分的性质

① $\int_a^a f(x)dx=0$；② $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$；

③ $\int_a^b 1dx = b-a$；　　　　④ $\int_a^b \left[\alpha f(x)+\beta g(x)\right]dx = \alpha\int_a^b f(x)dx+\beta\int_a^b g(x)dx$；

⑤ 区间的可加性：$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$；

⑥ $\begin{cases} x\in[a,b], f(x)\ge 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \ge 0 \\ x\in[a,b], f(x)\ge g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b g(x)dx \end{cases}$；

⑦ $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$；

⑧ 如果函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 存在最小值 m，最大值 M，且

$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$$

⑨ 积分中值定理：如果函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $\exists\xi\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$$

积分中值定理的推广：如果函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $\exists\xi\in(a,b)$，使得

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$$

⑩ 积分第一中值定理：如果函数 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $g(x)\ge 0$，则 $\exists\xi\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$$

柯西不等式：如果函数 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)dx\right]^2 \le \int_a^b f^2(x)dx\int_a^b g^2(x)dx$$

【考点 8】变限积分函数与牛顿莱布尼兹公式

2.变限积分函数

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，对任意的 $x\in[a,b]$，$f(x)$ 在 $[a,x]$ 上可积，由此定义了区间 $[a,b]$ 上关于上限 x 的函数，记为

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt$$

这个函数称为变限积分函数或变上限积分函数

变限积分函数导数公式：设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则变限积分函数 $\int_a^x f(t)dt$ 可导，并且其导函数为

$$F'(x)=\left[\int_a^x f(t)dt\right]'=f(x)$$

$$\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(t)dt=f\left[\varphi_2(x)\right]\varphi_2'(x)-f\left[\varphi_1(x)\right]\varphi_1'(x)$$

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则变限积分函数 $\int_a^x f(t)dt$ 就是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数

2.牛顿莱布尼兹公式：设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，函数 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数，则

$$\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)$$

【考点 9】反常积分敛散性的判别

1.区间无限的反常积分敛散性的判别

① 定义法

② 比较判别法：设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 连续，且 $0\le f(x)\le g(x)$

若 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 收敛，则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛；

若 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散。则 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 发散

③ 极限判别法：设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 连续，$g(x)\ne 0$，$\lambda=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$

若 $0<\lambda<+\infty$，则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 与 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 同收同发；

若 $\lambda=0$，$\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 收敛时，$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛；

若 $\lambda=+\infty$，$\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 发散时，$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散

2.被积函数无界的反常积分敛散性的判别

① 定义法

② 比较判别法：设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b)$ 连续，b 为 $f(x)$ 的瑕点，且 $0\le f(x)\le g(x)$

若 $\int_a^b g(x)dx$ 收敛，则 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛；

若 $\int_a^b f(x)dx$ 发散。则 $\int_a^b g(x)dx$ 发散

③ 极限判别法：设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b)$ 连续，b 为 $f(x)$ 的瑕点，$g(x)\neq 0$，

$\lambda=\lim\limits_{x\to b^-}\dfrac{f(x)}{g(x)}$

若 λ 存在且不为 0，则 $\int_a^b f(x)dx$ 与 $\int_a^b g(x)dx$ 同收同发；

若 λ 存在且为 0，$\int_a^b g(x)dx$ 收敛时，$\int_a^b f(x)dx$ 收敛；

若 λ 不存在，$\int_a^b g(x)dx$ 发散时，$\int_a^b f(x)dx$ 发散

【考点 10】定积分的几何应用

1.直角坐标下的不规则区域面积

$y=f(x),x=a,x=b$ 与 x 轴围成的区域的面积为 $\int_a^b f(x)dx$；

$y=f_2(x),y=f_1(x)$（其中 $f_2(x)\ge f_1(x)$）与直线 $x=a,x=b$ 围成的区域的面积为

$\int_a^b\left[f_2(x)-f_1(x)\right]dx$；

2.旋转体的体积

（1）$y=f(x),x=a,x=b$ 与 x 轴围成的区域绕 x 轴旋转一周所成的旋转体的体积

$\pi\int_a^b f^2(x)dx$；

（2）$y=f(x),x=a,x=b$ 与 x 轴围成的区域绕 y 轴旋转一周所成的旋转体的体积

$2\pi\int_a^b |x||f(x)|dx$；

（3）$y=f(x),x=a,x=b$ 与 x 轴围成的区域绕 $x=c$ 轴旋转一周所成的旋转体的

体积 $2\pi\int_a^b |c-x||f(x)|dx$；

第四章 空间解析几何

【考点 1】空间平面与直线

1.空间平面：法向向量$\vec{n}=(A,B,C)$

一般式：$Ax+By+Cz+D=0$

点法式：$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$

截距式：$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

2.空间直线：方向向量$\vec{s}=(l,m,n)$

一般式：$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$

点向式：$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$

参数式：$\begin{cases}x=x_0+lt\\y=y_0+mt\\z=z_0+nt\end{cases}$

【考点 2】空间曲线与曲面

1.一般式：$\Gamma:\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$

2.参数方程：$\Gamma:\begin{cases}x=\alpha(t)\\y=\beta(t),t\in[t_1,t_2]\\z=\gamma(t)\end{cases}$

3.空间曲线投影：$\Gamma:\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$，消去 z 得$\begin{cases}H(x,y)=0\\z=0\end{cases}$是曲线$\Gamma$在 xOy 平面的投影方程，其他投影相类似

4.旋转曲面：$C:\begin{cases}f(x,z)=0\\y=0\end{cases}$绕 z 轴旋转的旋转曲面方程为 $f\left(\pm\sqrt{x^2+y^2},z\right)=0$，其他旋转类似

5.几个特殊的曲面

椭球面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

单叶双曲面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

双叶双曲面：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

椭圆抛物面：$\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z\left(p,q>0\right)$

椭圆锥面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$

第五章 多元函数微积分学

【考点 1】偏导数与可微的概念

1.偏导数的概念

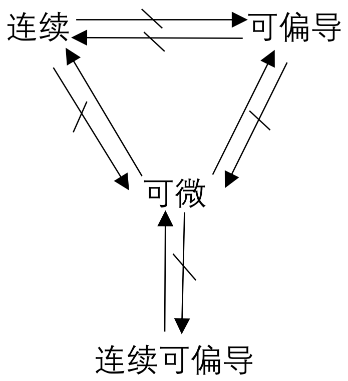
$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}=f_x'(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}=f_y'(x_0,y_0)=\lim_{\Delta y\to0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}=\lim_{y\to y_0}\frac{f(x_0,y)-f(x_0,y_0)}{y-y_0}$$

2.可微的等价定义

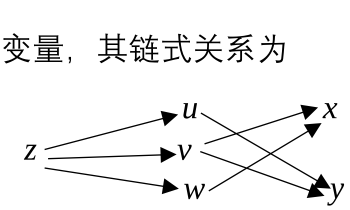
$$\lim_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}\frac{f(x,y)-f(x_0,y_0)-A(x-x_0)-B(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}=0$$

3.连续、可偏导、可微、连续可偏导的关系



【考点 2】链式求导法则

设 $z=f(u,v,w),u=u(y),v=v(x,y),w=w(x)$，$u,v,w$ 称为中间变量，x,y 称为真正的自变量，z 为因变量，其链式关系为



则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial w}\cdot\dfrac{dw}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\cdot\dfrac{du}{\partial y}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial y}$

【考点 3】隐函数存在定理

定理 1: 设函数 $F(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某一邻域内具有连续的偏导数, 且 $F(x_0,y_0)=0, F_y'(x_0,y_0)\neq 0$，则方程 $F(x,y)=0$ 在点 (x_0,y_0) 的某一邻域内能唯一确定一个连续且具有连续导数的函数 $y=f(x)$，它满足条件 $y_0=f(x_0)$，且有 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{F_x'}{F_y'}$；

定理 2：设函数 $F(x,y,z)$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 的某一邻域内具有连续的偏导数，且 $F(x_0,y_0,z_0)=0, F_z'(x_0,y_0,z_0)\neq 0$，则方程 $F(x,y,z)=0$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 的某一邻域内能唯一确定一个连续且具有连续偏导数的函数 $z=f(x,y)$，它满足条件 $z_0=f(x_0,y_0)$，且有 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F_x'}{F_z'}, \dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F_y'}{F_z'}$。

【考点 4】多元极值

1.无条件极值

① 求驻点 $\begin{cases} f_x'(x_0,y_0)=0 \\ f_y'(x_0,y_0)=0 \end{cases}$

② $\begin{cases} f_{xx}''(x_0,y_0)=A \\ f_{xy}''(x_0,y_0)=B \Rightarrow AC-B^2 \\ f_{yy}''(x_0,y_0)=C \end{cases}\begin{cases} >0\begin{cases} A>0\Rightarrow \text{极小值} \\ A<0\Rightarrow \text{极大值} \end{cases} \\ <0\Rightarrow \text{该点不取极值} \\ =0\Rightarrow \text{该法失效(使用定义)} \end{cases}$

2.条件极值

求目标函数 $u=f(x,y,z)$ 在约束条件 $\begin{cases} \varphi(x,y,z)=0 \\ \psi(x,y,z)=0 \end{cases}$ （等式）下的最值

解题步骤:

① 构造辅助函数 $F(x,y,z,\lambda,\mu)=f(x,y,z)+\lambda\varphi(x,y,z)+\mu\psi(x,y,z)$；

② 令 $F_x'=F_y'=F_z'=F_\lambda'=F_\mu'=0$；

③ 解方程组，求出所有的可能的最值点，比较大小即可得到最值。

【考点 5】直角坐标系下的二重积分计算

1.先 x 后 y 型

设 $D=\left\{(x,y)\middle|\varphi_1(y)\le x\le\varphi_2(y),a\le y\le b\right\}$，则

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int_a^b\left[\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)}f(x,y)dx\right]dy=\int_a^b dy\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)}f(x,y)dx$$

2.先 y 后 x 型

设 $D=\left\{(x,y)\middle|c\le x\le d,\psi_1(x)\le y\le\psi_2(x)\right\}$，则

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int_c^d\left[\int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)}f(x,y)dy\right]dx=\int_c^d dx\int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)}f(x,y)dy$$

3.混合型

将区域分成若干个“先 x 后 y 型”与“先 y 后 x 型”，再利用区域的可加性把所有区域的二重积分相加即可

【考点 6】极坐标系下的二重积分计算

直角坐标与极坐标的变换：$\begin{cases}x=r\cos\theta\\y=r\sin\theta\end{cases}$，$x^2+y^2=r^2,\dfrac{y}{x}=\tan\theta$，$d\sigma=rd\theta\cdot dr$

设 $D=\left\{(r,\theta)\middle|\alpha\le\theta\le\beta,r_1(\theta)\le r\le r_2(\theta)\right\}$，则

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_D f(r\cos\theta,r\sin\theta)\cdot rdrd\theta=\int_\alpha^\beta d\theta\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)}f(r\cos\theta,r\sin\theta)\cdot rdr$$

第六章 无穷级数

【考点 1】正项级数的比较判别法与比值判别法

1.比较判别法

设$u_n \le v_n$，若$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛，若$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散，则$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$发散

2.比值判别法

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho\begin{cases}<1\text{收敛}\\>1\text{发散}\\=1\text{失效}\end{cases}$$

【考点 2】几个重要级数

① $\sum_{n=1}^{\infty} aq^n\begin{cases}|q|<1,\text{收敛}\\|q|\ge 1,\text{发散}\end{cases}(a\ne 0)$

② $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\begin{cases}p>1,\text{收敛}\\p\le 1,\text{发散}\end{cases}$

③ $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}\ln^{\beta} n}\begin{cases}\alpha>1,\text{收敛}\\\alpha<1,\text{发散}\\\alpha=1,\beta>1,\text{收敛}\\\alpha=1,\beta\le 1,\text{发散}\end{cases}$

【考点 3】常见的麦克劳林级数

1.$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots,(-\infty<x<+\infty)$

2.$\cos=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots,(-\infty<x<+\infty)$

3.$\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots,(-1<x\le 1)$

4.$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n=1-x+x^2-x^3+\cdots,(-1<x<1)$

5.$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+x^3+\cdots,(-1<x<1)$

6. $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots, \left(-\infty < x < +\infty\right)$

第七章 常微分方程

【考点 1】一阶微分方程的求解

1.可分离变量型：$\frac{dy}{dx}=g\left(x\right)h\left(y\right)\Rightarrow\frac{dy}{h\left(y\right)}=g\left(x\right)dx\Rightarrow\int\frac{dy}{h\left(y\right)}=\int g\left(x\right)dx$

2.一阶线性型：$\begin{array}{l}\frac{dy}{dx}+P\left(x\right)y=Q\left(x\right)\Rightarrow y=e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q\left(x\right)e^{\int P(x)dx}dx+C\right]\\ \frac{dx}{dy}+P\left(y\right)x=Q\left(y\right)\Rightarrow x=e^{-\int P(y)dy}\left[\int Q\left(y\right)e^{\int P(y)dy}dy+C\right]\end{array}$

【考点 2】二阶微分方程的求解

1.二阶常系数齐次线性微分方程的求解

$y''+py'+qy=0$ （p,q 为常数）称为二阶常系数齐次线性微分方程

求解步骤：

① 写特征方程 $\lambda^2+p\lambda+q=0$，判别式 $\Delta=p^2-4q$

② 写通解 $\begin{cases}y=C_1e^{\lambda_1x}+C_2e^{\lambda_2x} & \Delta>0,\lambda_1\neq\lambda_2\\ y=\left(C_1+C_2x\right)e^{\lambda_1x} & \Delta=0,\lambda_1=\lambda_2\\ y=e^{\alpha x}\left(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x\right) & \Delta<0,\lambda_{1,2}=\alpha\pm\beta i\end{cases}$

2.二阶常系数非齐次线性微分方程的求解

$y''+py'+qy=f\left(x\right)$ （p,q 为常数）称为二阶常系数非齐次线性微分方程，$f\left(x\right)$ 为自由项

非齐通=齐通+非齐特（$y=Y+y^*$），齐通 Y 在上文中已经求出，下面分析如何求非齐特 y^*，根据自由项 $f\left(x\right)$ 的不同假设 y^*，然后再使用待定系数法求出 y^* 中的参数即可

（1） $f\left(x\right)=e^{\lambda x}P_m\left(x\right)$ 时，$y^*=e^{\lambda x}Q_m\left(x\right)\cdot x^k$

关于 k 的设定：

若 $f(x)$ 中的 λ 不是特征方程的根，则 $k=0$；

若 $f(x)$ 中的 λ 是特征方程的一重根，则 $k=1$；

若 $f(x)$ 中的 λ 是特征方程的二重根，则 $k=2$。

（2） $f(x)=e^{\alpha x}\left[P_l(x)\cos\beta x+Q_n(x)\sin\beta x\right]$ 时，

$$y^*=e^{\alpha x}\left[R_m^1(x)\cos\beta x+R_m^2(x)\sin\beta x\right]\cdot x^k, \quad m=\left\{\max(l,n)\right\}$$

关于 k 的设定：

若 $f(x)$ 中的 $\alpha\pm\beta i$ 不是特征方程的根，则 $k=0$；

若 $f(x)$ 中的 $\alpha\pm\beta i$ 是特征方程的根，则 $k=1$。